Μάθημα 18ο 09/12/16

Εστω S επιφάνεια γράφημα της συνάρτησης $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία

$S: z = h(x,y)$

Θεωρώ το σύστημα συντεταγμένων $X: U \to S$, $X(x,y) = (x, y, h(x,y))$

1η θεμελιώδης μορφή

$E = \|X_x\|^2$

$F = \langle X_x, X_y \rangle$, $G = \|X_y\|^2$

$X_x = (1, 0, h_x)$ $\quad E = 1 + h_x^2$, $F = h_x h_y$, $G = 1 + h_y^2$

$X_y = (0, 1, h_y)$

$X_{xx} = (0, 0, h_{xx})$ $\quad N = \dfrac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$, $f = \dfrac{h_{xy}}{\sqrt{\quad}}$, $g = \dfrac{h_{yy}}{\sqrt{\quad}}$

$X_{xy} = (0, 0, h_{xy})$

$X_{yy} = (0, 0, h_{yy})$

2η θεμελιώδης μορφή

$e = \langle X_{xx}, N \rangle = \dfrac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

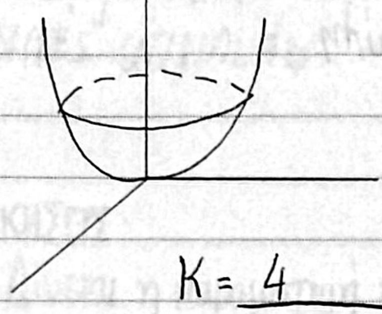
Καμπυλότητα Gauss

$$K=\frac{eg-f^2}{EG-F^2}, \quad K=\frac{h_{xx}h_{yy}-h^2_{xy}}{(1+h_x^2+h_y^2)^2}$$

$$H=\frac{(1+h_y^2)h_{xx}-2h_x h_y \cdot h_{xy}+(1+h_x^2)h_{yy}}{2(1+h_x^2+h_y^2)^{3/2}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1)



$S: z=x^2+y^2=h(x,y)$

$h_x=2x, \quad h_{xx}=2$

$h_y=2y, \quad h_{yy}=2$

$h_{xy}=0$

$$K=\frac{4}{(1+4x^2+4y^2)^2}>0 \Rightarrow$$ όλα τα σημεία είναι ελλειπτικά

Ανάλυση ομφαλικού σημείου.

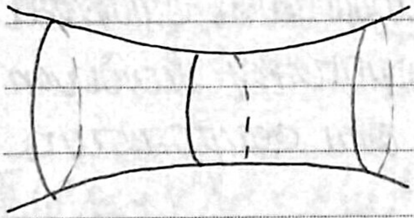
$$\frac{e}{E}=\frac{f}{F}=\frac{g}{G}\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{2}{\sqrt{}}}{1+4x^2}=\frac{0}{4xy}=\frac{\frac{2}{\sqrt{}}}{1+4y^2}\neq 0.$$

Αν υπάρχουν ομφαλικά θα πρέπει να πληρούν $x,y=0$.

$$x=0, \quad \frac{\frac{2}{\sqrt{1+4y^2}}}{1}=\frac{\frac{2}{\sqrt{1+4y^2}}}{1+4y^2} \Rightarrow y=0.$$

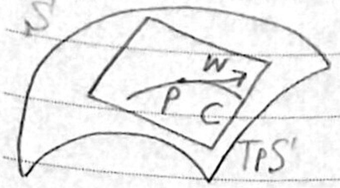
Το $x(0,0)=(0,0,0)$ είναι ομφαλικό σημείο.

2) $S: z=x^2-y^2=h(x,y)$



$$K=\frac{-4}{(1+4x^2+4y^2)^2}<0$$

Ασυμπτωτικές διευθύνσεις - Ασυμπτωτικές καμπύλες (γραμμές)



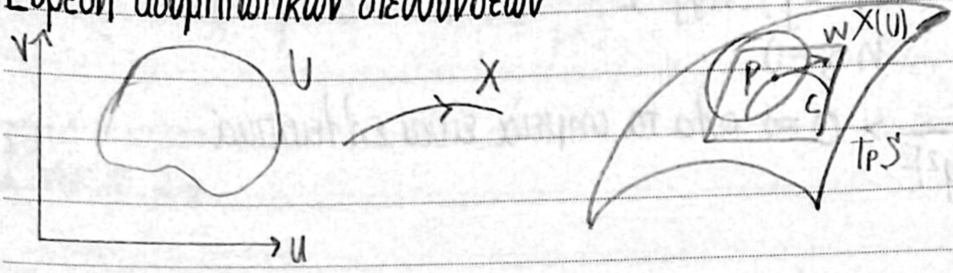
$\|w\| = 1, \ K_n(w) = \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle$

ΟΡΙΣΜΟΣ: α) Καλούμε ασυμπτωτική διεύθυνση στο σημείο $p \in S$ κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $w \in T_pS$ ώστε $K_n(w) = 0 \Leftrightarrow II_p(w) = 0$.

b) Μια κανονική καμπύλη $c: I \to S$ καλείται ασυμπτωτική καμπύλη $\Leftrightarrow$ $\forall t \in I$, $c'(t) \in T_{c(t)}S$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση.

Αν $c: I \to S$ είναι ευθεία $\Rightarrow$ η c είναι ασυμπτωτική καμπύλη

Εύρεση ασυμπτωτικών διευθύνσεων



$\{X_u(X^{-1}(p)), X_v(\quad)\}$ βάση του T_pS.

Το $w = aX_u + bX_v$, $(a,b) \neq (0,0)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση

$\Leftrightarrow II_p(w) = 0 \Leftrightarrow ea^2 + 2fab + gb^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e(a/b)^2 + 2f(a/b) + g = 0 \\ \text{ή } e + 2f(b/a) + g(b/a)^2 = 0 \end{cases}$

$(2f)^2 - 4eg = 4(f^2 - eg) \geq 0$.

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

Συμπέρασμα: Ασυμπτωτική διεύθυνση υπάρχει μόνο αν $K \leq 0$.

- Στα υπερβολικά σημεία και μόνο υπάρχουν 2 ακριβώς ασυμπτωτικές διευθύνσεις
- Στα παραβολικά σημεία και μόνο υπάρχει 1 ακριβώς ασυμπτωτική διεύθυνση
- Στα ισόπεδα σημεία όλες οι εφαπτομενικές διευθύνσεις είναι ασυμπτωτικές διευθύνσεις.

Εύρεση ασυμπτωτικών καμπυλών

$c(t)=X(u(t),v(t))$, $c'(t)=\underbrace{u'(t)}_{\alpha} X_u(u(t),v(t))+\underbrace{v'(t)}_{b} X_v(u(t),v(t))$

$c \equiv$ ασυμπτωτική καμπύλη $\Leftrightarrow$ $c'(t)$ είναι ασυμπτωτική διεύθυνση $\forall t\in I$
$\Leftrightarrow$ $e(u(t),v(t))(u'(t))^2+2f(u(t),v(t))u'(t)v'(t)+g(u(t),v(t))(v'(t))^2=0$

ΠΡΟΤΑΣΗ: $X: U \to S$ σύστημα συντεταγμένων κανονικής επιφάνειας S
i) Αν οι παραμετρικές καμπύλες είναι ασυμπτωτικές καμπύλες τότε $e=g=0$
ii) Αν όλα τα σημεία της περιοχής συντεταγμένων $X(U)$ είναι υπερβολικά και $e=g=0$, τότε οι ασυμπτωτικές καμπύλες είναι ακριβώς οι παραμετρικές καμπύλες

$K_n(X_u)=\frac{e}{E}$, $K_n(X_v)=\frac{g}{G}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ:
1) Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια με παραμετρική παράσταση $X(u,v)=(u,v,e^u+e^v)$
i) $I=?$ $\quad II=?$ $\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2$
ii) Να υπολογιστεί η $K_n(c'(1))$ όπου $c(t)=X(t,t^2)$ επιφανειακή καμπύλη

ΛΥΣΗ: i) Γράφημα $z=e^x+e^y$
$I(u'X_u+v'X_v)=E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2$

$E=\|X_u\|^2$, $F=\langle X_u,X_v\rangle$, $G=\|X_v\|^2$
$X_u=(1,0,e^u)$
$X_v=(0,1,e^v)$
$E=\|X_u\|^2=1+e^{2u}$, $F=\langle X_u,X_v\rangle=e^{u+v}$

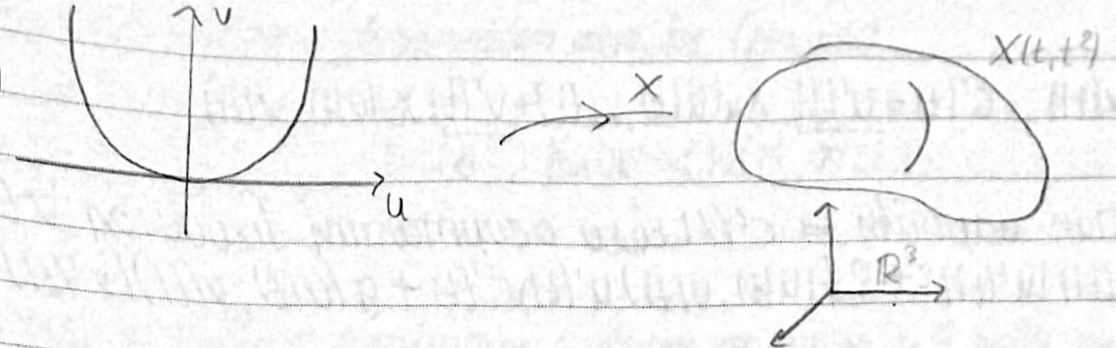
$X_u\times X_v=(-e^u,-e^v,1)$

$N(u,v)=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\frac{1}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}(-e^u,-e^v,1)$

$II(u'X_u+v'X_v)=e(u')^2+2fu'v'+g(v')^2$

$e=\langle X_{uu},N\rangle$	$X_{uu}=(0,0,e^u)$	$e=\frac{e^u}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$, $f=0$, $g=\frac{e^v}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$
$f=\langle X_{uv},N\rangle$	$X_{uv}=(0,0,0)$	
$g=\langle X_{vv},N\rangle$	$X_{vv}=(0,0,e^v)$	

ii)



$$K_n(c'(1)) = \frac{II(c'(1))}{I(c'(1))} = \frac{II(u'(1)X_u + v'(1)X_v)}{I(u'(1)X_u + v'(1)X_v)} =$$

$$= \frac{e(u'(1))^2 + 2f u'(1)v'(1) + g(v'(1))^2}{E(u'(1))^2 + 2F u'(1)v'(1) + G(v'(1))^2}$$

$\begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v'(t) = 2t \end{cases}$, για $t=1$ έχω $u(1)=1$, $u'(1)=1$, $v(1)=1$, $v'(1)=2$

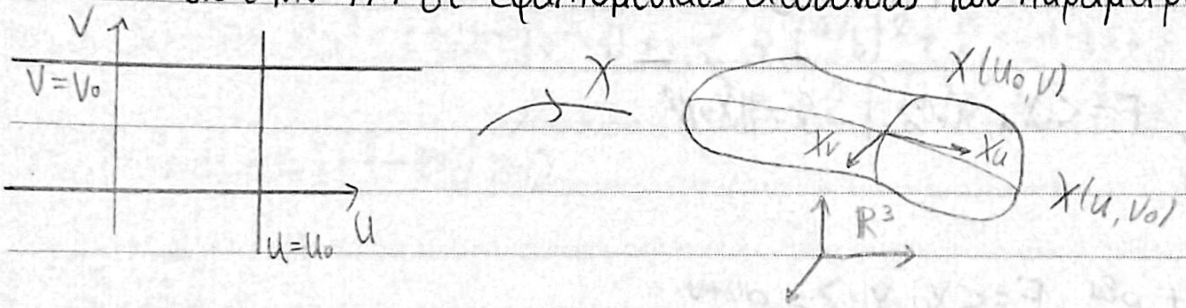
$E(u,v) = \|X_u(u,v)\|^2$ θα υπολογιστεί για $u(1)=1$, $v(1)=1$

$E(1,1) = 1+e^2$ $\qquad e(1,1) = \frac{e^1}{\sqrt{e^2+e^2+1}}$, $f(1,1)=0$, $g(1,1) = \frac{e^1}{\sqrt{e^2+e^2+1}}$

$F(1,1) = e^2$

$G(1,1) = 1+e^2$

iii) Υπολογίστε την K_n σε εφαπτομενικές διευθύνσεις των παραμετρικών καμπυλών



$K_n(X_u) = ?$, $K_n(X_v) = ?$

$$K_n(X_u) = K_n(1\cdot X_u + 0\cdot X_v) = \frac{II(1\cdot X_u + 0\cdot X_v)}{I(1\cdot X_u + 0\cdot X_v)} = \frac{e(u,v_0)\cdot 1^2}{E(u,v_0)\cdot 1^2} = \frac{e^u}{(1+e^{2u})\sqrt{1+e^{2u}+e^{2v_0}}}$$

$$K_n(X_v) = K_n(0\cdot X_u + 1\cdot X_v) = \frac{II(0\cdot X_u + 1\cdot X_v)}{I(0\cdot X_u + 1\cdot X_v)} = \frac{g(u_0,v)}{G(u_0,v)} = \frac{e^v}{(1+e^{2v})\sqrt{1+e^{2u_0}+e^{2v}}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: α) Βρείτε κρίσιμα σημεία και κρίσιμες τιμές της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y,z) = (x+y+z-1)^2$

β) Εξετάστε το ίδιο για την $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2yz$.

ΛΥΣΗ:

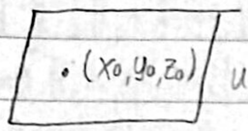
α) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

Βρίσκω τα κρίσιμα σημεία $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}=0$.

Αν c όχι κρίσιμη τότε $f^{-1}(c)$ κανονική επιφάνεια

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2(x+y+z-1)=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}$$

Κρίσιμα σημεία: Όλα τα σημεία του επιπέδου $x+y+z-1=0$.

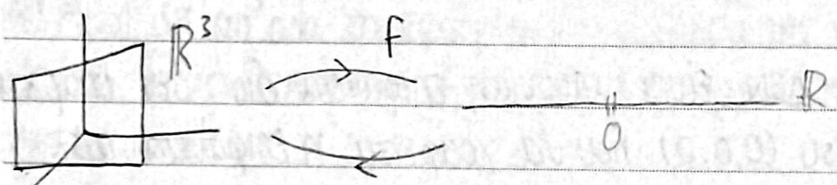


κρίσιμα

$x_0+y_0+z_0-1=0$ τότε $f(x_0,y_0,z_0)=(x_0+y_0+z_0-1)^2=0$

$f^{-1}(c)$ κανονική επιφάνεια για $c\neq 0$

Για $c=0$ $f^{-1}(0)=\{(x,y,z)\mid f(x,y,z)=0\}$



$f^{-1}(0)=\{(x,y,z)\mid (x+y+z-1)^2=0\}$

$x+y+z-1=0$ επίπεδο, $z=1-x-y$ κανονική επιφάνεια ως γράφημα

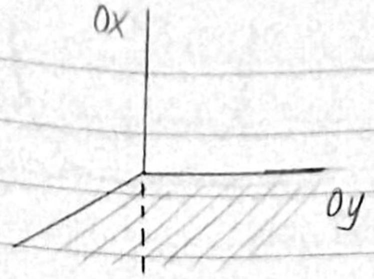
$z=g(x,y)=1-x-y$

Άρα, $\forall c\in\mathbb{R}$, $f^{-1}(c)$ κανονική επιφάνεια.

Κρίσιμα σημεία $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=0 \Rightarrow 2xyz=0,\ x^2z=0,\ x^2y=0$

Τα σημεία $(0,y,z)$ είναι κρίσιμα.

Αν $x\neq 0 \Rightarrow y=z=0$. Επίσης, τα $(x,0,0)$ είναι κρίσιμα, $x\in\mathbb{R}$.



Κρίσιμες $f(x_0,y_0,z_0)$ όπου (x_0,y_0,z_0) κρίσιμο σημείο
τιμές

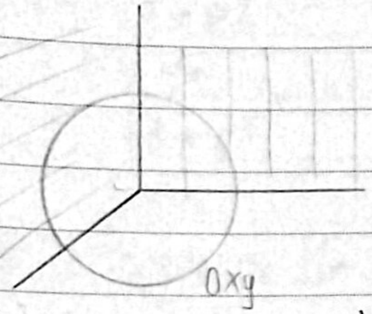
$f(0,y,z)=0$ Η μόνη κρίσιμη τιμή είναι το 0
$f(x,0,0)=0$

Για $c\neq 0$ από θεώρημα έχω $f^{-1}(c)$ είναι κανονική επιφάνεια

Για $c=0$, $f^{-1}(0)=\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=0,\ x^2yz=0\}$

$x=0$ ή $y=0$ ή $z=0$
$y,z\in\mathbb{R}$ $\quad x,z\in\mathbb{R}$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$

Η $f^{-1}(0)$ είναι ένωση 3 επιπέδων



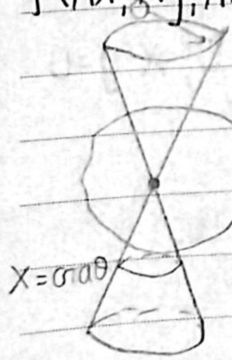
Κάθε κανονική επιφάνεια τοπικά είναι γράφημα

$z=f(x,y)$ ή $y=f(x,z)$ ή $x=f(y,z)$

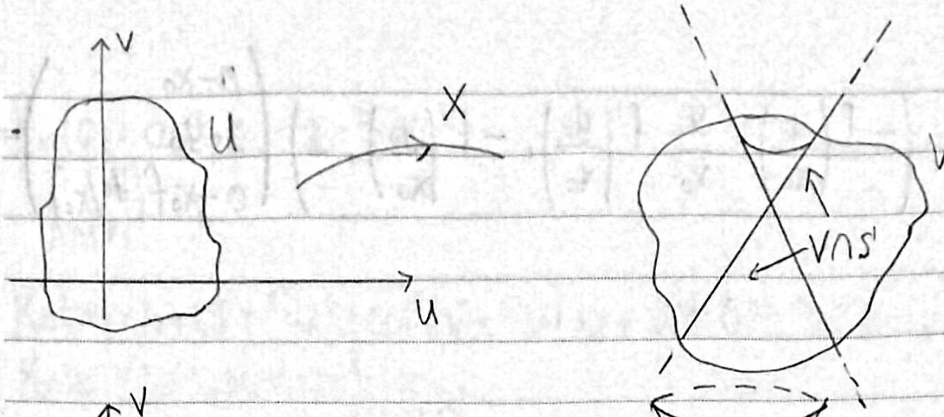
Η $f^{-1}(0)$ <u>ΔΕΝ</u> είναι κανονική επιφάνεια διότι δεν υπάρχει περιοχή του $(0,0,0)$ που να γράφεται η επιφάνεια ως γράφημα.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Αποδείξτε ότι το σύνολο $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2=y^2+z^2\}$, ΔΕΝ είναι κανονική.

ΛΥΣΗ: Η συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2-y^2-z^2$ είναι ομογενής ως προς $x-0$, $y-0$, $z-0$ οπότε, η επιφάνεια είναι κώνος με κορυφή το $(0,0,0)$.
$f(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^2 f(x,y,z)$

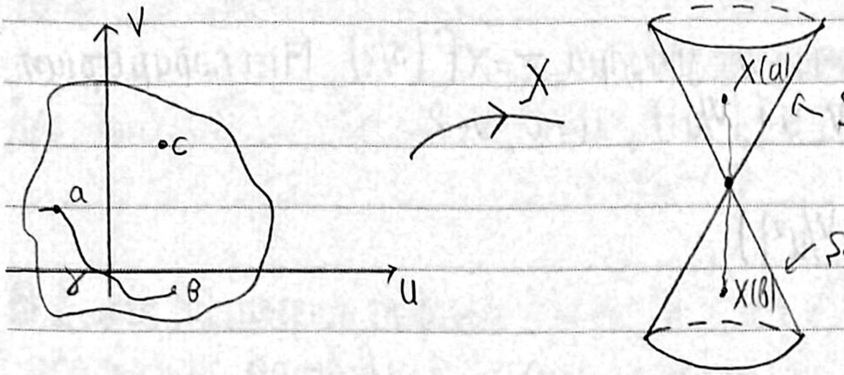


Έστω ότι η S είναι κανονική επιφάνεια τότε γύρω από το $(0,0,0)$ υπάρχει ανοιχτό V του $\mathbb{R}^3$ και απεικόνιση $X: U$ ανοιχτό $\subseteq\mathbb{R}^2 \to V\cap S$ ώστε X ομοιομορφισμός (1-1, επί, συνεχής, X^{-1} συνεχής)



$S_1: X=+\sqrt{y^2+z^2}$

$S_2: X=-\sqrt{y^2+z^2}$

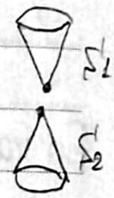


$\exists\, \gamma:[0,1]\to U$ συνεχής με $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=\beta$. και $\gamma(t)\neq c$, $\forall t\in[0,1]$

$\Longrightarrow$ Η $X(\gamma(t))$ ενώνει τα $X(a)$, $X(\beta)$ και δεν διέρχεται από το $X(\gamma)$

(Αν $X(\gamma(t_0))=X(c) \xRightarrow{X:\,1-1} \gamma(t_0)=c$)

$U\setminus\{c\}$ συνεκτικό ενώ $S'\setminus\{X(c)\}$ σπάει σε δύο συνεκτικές συνιστώσες



4) Αποδείξτε απ' όλα τα εφαπτόμενα επίπεδα της επιφάνειας με εξίσωση $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$, $x\neq 0$, f λεία συνάρτηση, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, διερχόμενη από το $f(0,0,0)$

ΛΥΣΗ:

Η εξίσωση του εφαπτομενικού επιπέδου στο τυχόν $(x_0, y_0, f(y_0/x_0))$

Είναι $\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)\cdot\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\\ z-x_0 f(y_0/x_0)\end{pmatrix}=0$, όπου $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

$(x,y,z)\mapsto F(x,y,z)=z-xf(y/x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-f\left(\frac{y}{x}\right)-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-xf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=1$$

$$\operatorname{grad} F(x_0,y_0,z_0)=\left(-f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+\frac{y_0}{x_0^2}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right),\ -f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right),\ 1\right)$$

Για $x=y=z=0$ έχω ότι: $\left(-f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)+\frac{y_0}{x_0^2}\cdot f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right), -f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right), 1\right)\begin{pmatrix}0-x_0\\ 0-y_0\\ 0-x_0 f(y_0/x_0)\end{pmatrix}=0$

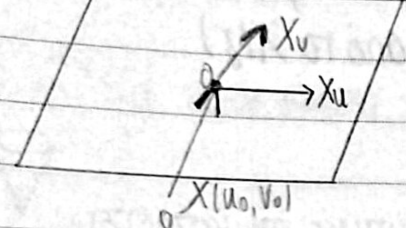
$\vdots$

$0=0.$

Β' τρόπος: Η επιφάνεια είναι κανονική ως γράφημα $z=xf(y/x)$. Μια παραμετρική παράσταση είναι $X(u,v)=(u,v,uf(v/u))$, $u\neq 0$, $v\in\mathbb{R}$

$X_u=(1,0,f(v/u)+uf'(v/u)\cdot(-v/u^2))$

$X_v=(0,1,uf(v/u)\cdot 1/u)$



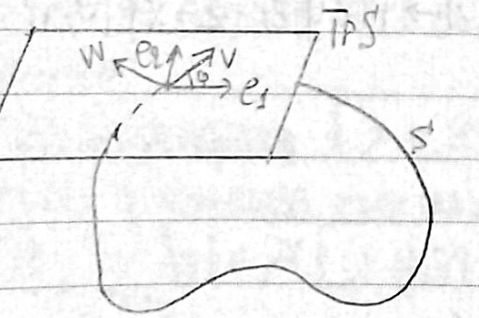
$y(\lambda,\mu)=X(u_0,v_0)+\lambda X_u(u_0,v_0)+\mu X_v(u_0,v_0)$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ μεταβλητά

Για να διέρχεται από $(0,0,0)$ πρέπει να βρω λ,μ ώστε $0=X(u_0,v_0)+\lambda X_u(u_0,v_0)+\mu X_v(u_0,v_0)$

$\ldots\ \lambda=-u,\ \mu=-v$

5) Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των καθέτων καμπυλοτήτων μιας κανονικής επιφάνειας σε τυχόν σημείο p, ως προς 2 κάθετες διευθύνσεις στο p, είναι ανεξάρτητο των διευθύνσεων.

ΛΥΣΗ:



Ας είναι $v,w\in T_pS$, $\langle v,w\rangle=0$.

Θέλω ν.δ.ο. $k_n(v)+k_n(w)=$ σταθερό (ανεξ. των v,w)

Έστω $\{e_1,e_2\}$ ορθομοναδιαίο πλαίσιο αποτελούμενο από κύριες διευθύνσεις.

Δηλαδή $L_p(e_1)=k_1e_1$, $L_p(e_2)=k_2e_2$ τα e_1,e_2 ιδιοδιανύσματα ως Weingarten με ιδιοτιμές τα $\underset{\max k_n}{k_1},\underset{\min k_n}{k_2}$

Ας είναι $\varphi=(\widehat{v,e_1})$

$K_n(\varphi) = \cos^2\varphi K_1 + \sin^2\varphi K_2$
$\parallel$
$K_n(v)$

$K_n(w) = K_n(\varphi + \pi/2) = \cos^2(\varphi + \pi/2) K_1 + \sin^2(\varphi + \pi/2) K_2$
$K_n(w) = \sin^2\varphi K_1 + \cos^2\varphi K_2$

Άρα, $K_n(v) + K_n(w) = K_1 + K_2 = 2H = \dfrac{2\underbrace{eG - 2fF + Eg}}{2(EG - F^2)}$ = σταθερό στο σημείο 0. (συνάρτηση του σημείου μόνο)

6) Δίνεται παραμετρική επιφάνεια $X(u,v) = (u, v, u^2 + v^3)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Να βρεθούν ελλειπτικά, υπερβολικά, παραβολικά, ισόπεδα, ομφαλικά.

ΛΥΣΗ:

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

$K(u_0, v_0) > 0 \Rightarrow X(u_0, v_0)$ ελλειπτικό
$K(u_0, v_0) < 0 \Rightarrow X(u_0, v_0)$ υπερβολικό
$K(u_0, v_0) = 0 \Rightarrow X(u_0, v_0)$ παραβολικό

Ομφαλικά: $K_1 = K_2 \neq 0$ $\boxed{\text{Σίγουρα } K_{Gauss} > 0}$
$\Updownarrow$
$K_n = \text{σταθ.} = c \neq 0$
$\Updownarrow$
$\dfrac{II}{I_p} = c \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e}{E} = \dfrac{f}{F} = \dfrac{g}{G} = c \neq 0$

$X_u = (1, 0, 2u)$, $X_v = (0, 1, 3v^2)$, $X_u \times X_v = (-2u, -3v^2, 1)$
$N(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{4u^2 + 9v^4 + 1}}(-2u, -3v^2, 1)$

$X_{uu} = (0, 0, 2)$, $X_{uv} = (0, 0, 0)$, $X_{vv} = (0, 0, 6v)$

$E = \|X_u\|^2 = 1 + 4u^2$
$F = \langle X_u, X_v \rangle = 6uv^2$
$G = \|X_v\|^2 = 1 + 9v^4$

$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \dfrac{2}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}$.

$f = 0 = \langle X_{uv}, N \rangle$

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \dfrac{6v}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}$

$K = \dfrac{eg-f^2}{EG-F^2} = \dfrac{12v}{(4u^2+9v^4+1)(EG-F^2)}$.

$EG-F^2 = \|X_u \times X_v\|^2 > 0$

$K>0 \Leftrightarrow v>0$ όλα τα σημεία $X(u,v)$, $v>0$ είναι ελλειπτικά

$K<0 \Leftrightarrow v<0$ $v<0$ είναι υπερβολικά

$K=0 \Leftrightarrow v=0$ $X(u,0)$ παραβολικά

$\therefore$ $e \neq 0$

Ισόπεδα δεν υπάρχουν διότι $e\neq 0$.

Για τα ομφαλικά σημεία: $\dfrac{\frac{2}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}}{1+4u^2} = \dfrac{0}{6uv^2} = \dfrac{\frac{6v}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}}{1+9v^4} = c \neq 0$

(2) $u=0$, ή (1) $v=0$

(1) Αν $v=0$, $\dfrac{\frac{0}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}}{1+9v^4} = c \neq 0$. Αδύνατο, άρα για $v=0$ όχι ομφαλικά σημεία.

(2) $u=0$, $\dfrac{\frac{2}{\sqrt{}}}{1} = \dfrac{\frac{6v}{\sqrt{}}}{1+9v^4}$

$1+9v^4 = 3v \Leftrightarrow 9v^4-3v+1=0$

$g(v) = 9v^4-3v+1$

$g' = 36v^3-3 = 3(12v^3-1)$

$g'=0 \Leftrightarrow v = \sqrt[3]{1/12}$

		$\sqrt[3]{1/12}$	
g'	$-$	0	$+$
g	$\searrow$		$\nearrow$

$g_{min} = g(\sqrt[3]{1/12}) = -\frac{9}{4}\sqrt[3]{1/12} + 1 > 0$

Άρα $g(v) \geq g_{min} > 0$

<u>ΔΕΝ</u> έχει ρίζα $\Rightarrow$ Δεν υπάρχουν ομφαλικά σημεία

7) Θεωρούμε την επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^2 + \frac{y^2}{2}$

i) Ν.δ.ο. τα διανύσματα $w_1 = (0,1,0)$, $w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

ανήκουν στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $p = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$

$N(x,y,z) = \frac{\text{grad } F}{\|\text{grad } F\|}$, όπου $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$F(x,y,z) = z - x^2 - \frac{y^2}{2}$

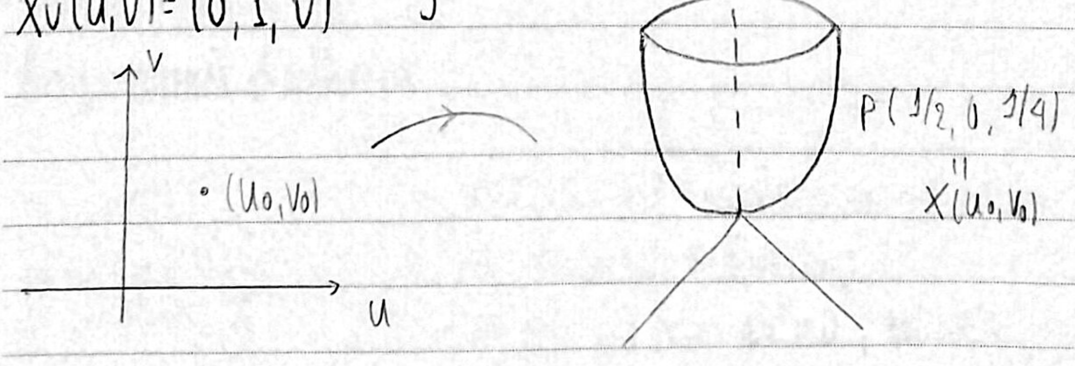
$N(x,y,z) = \frac{(-2x, -y, 1)}{\sqrt{4x^2+y^2+1}}$

$N\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right) = \frac{(-1, 0, 1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \langle w_1, N\rangle = 0 \\ \langle w_2, N\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow w_1, w_2$ εφαπτόμενα στο $p = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$

β' τρόπος: Μπορώ να παραμετρικοποιήσω την S. $X(u,v) = \left(u, v, u^2 + \frac{v^2}{2}\right)$

$\left.\begin{array}{l} X_u(u,v) = (1, 0, 2u) \\ X_v(u,v) = (0, 1, v) \end{array}\right\}$ βάση του T_pS $\forall p$



$X(u_0, v_0) = P = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}\right)$
$\parallel$
$\left(u_0, v_0, u_0^2 + \frac{v_0^2}{2}\right)$ $\quad u_0 = 1/2$
$v_0 = 0$

Άρα, $P = X\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$X_u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = (1, 0, 1)$
$X_v(1/2, 0) = (0, 1, 0)$ $\Big\}$ βάση του T_pS $\quad P = (1/2, 0, 1/4)$

$w_1 = \alpha X_u + \beta X_v$
$w_2 = \gamma X_u + \delta X_v$ $\Rightarrow$ w_1, w_2 εφαπτόμενα στο P

$w_1 = (0, 1, 0) = 0 X_u(1/2, 0) + 1 \cdot X_v(1/2, 0)$
$w_2 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = 1/\sqrt{2}\, X_u + 0 \cdot X_v$

ii) Υπολογίστε $L_P(w_1)$, $L_P(w_2)$, την εικόνα των w_1, w_2 μέσω της Weingarten

$L_P(w_1) = -dN_P(w_1) = -dN_P(0 \cdot X_u + 1 \cdot X_v) \xrightarrow{dN \text{ γραμ}} -dN_P(X_v) =$
$= -(N \circ X)_v = \cdots = -\frac{\partial}{\partial v}(N \circ X) = -\frac{\partial N}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1/2 \\ v=0}}$

$L_P: T_pS \longrightarrow T_pS$
$X' = L_P(X') = -dN(X')$

$L_P(w_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial N}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1/2 \\ v=0}}$